



TRIBELON
RIVISTA DI DISEGNO
UNIVERSITÀ DEGLI
STUDI DI FIRENZE

VOL. 2 | N. 4 | 2025
CONFIGURARE: ORDINE E MISURA
TO SHAPE: ORDER AND MEASURE

Citation: G. Anzani, *Algoritmi IA per ottimizzare e visualizzare l'errore in 3D nelle trilaterazioni*, TRIBELON, II, 2025, 4, pp. 115-122.

ISSN (stampa): 3035-143X

ISSN (online): 3035-1421

doi: <https://doi.org/10.36253/tribelon-3881>

Published: December, 2025

Copyright: 2025 Anzani G., this is an open access article published by Firenze University Press (<http://www.riviste.fupress.net/index.php/tribelon>) and distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

Data Availability Statement: All relevant data are within the paper and its Supporting Information files.

Competing Interests: The Author(s) declare(s) no conflict of interest.

Journal Website: riviste.fupress.net/tribelon

CODICI GRAFICI

ALGORITMI IA PER OTTIMIZZARE E VISUALIZZARE L'ERRORE IN 3D NELLE TRILATERAZIONI

GIOVANNI ANZANI

University of Florence
giovanni.anzani@unifi.it

In questo numero esploriamo una frontiera ormai concreta: la collaborazione tra intelligenza umana e artificiale, applicata alla creazione di applicativi CAD in linguaggio AutoLISP, specialistici per il rilevamento tramite trilaterazione. L'articolo prende la forma di un dialogo con GitHub Copilot, l'assistente AI basato su modelli avanzati di intelligenza artificiale, che può affiancare lo sviluppatore nella realizzazione di pacchetti software. In questo confronto diretto Copilot analizza e racconta le routine di trilaterazione che ha contribuito a generare, svelando la logica alla base di algoritmi complessi.

In particolare, vengono presentati due strumenti originali: il primo calcola la posizione più probabile di un punto nello spazio, confrontando e visualizzando le soluzioni ottenute con diversi algoritmi di ottimizzazione; il secondo trasforma la complessità di questi calcoli in un vero e proprio "paesaggio" tridimensionale, dove funzioni obiettivo multiple modellano la morfologia dell'errore e rendono immediata la ricerca della soluzione ottimale, avvalendosi di una potente metafora orografica.

Dalle riflessioni finali scaturiscono possibili strategie di collaborazione tra algoritmi e approcci deterministici di natura geometrica, offrendo spunti sia tecnici sia didattici per la progettazione e la comprensione del processo di trilaterazione.

Questa sperimentazione costituisce un'occasione preziosa per osservare da vicino un processo creativo in cui l'intuizione del progettista si fonde con la potenza computazionale dell'AI: quello che segue è il resoconto di questa conversazione virtuale, un'istantanea sul futuro dello sviluppo grafico.

La sinergia di Copilot e IA nella programmazione CAD

GitHub Copilot accelera lo sviluppo di codice AutoLISP per ambienti CAD consentendo allo sviluppatore di focalizzarsi sulla logica e sui flussi progettuali mentre la piattaforma gestisce sintassi, routine operative e operazioni complesse dalla geometria ai dati DXF. Genera rapidamente funzioni complete da descrizioni in linguaggio naturale e integra strumenti avanzati per ottimizzazione, documentazione e debug del codice. Dietro questa immediatezza c'è una raffinata architettura: il modello IA (il motore) è integrato da Copilot, l'"automobile" che trasforma la potenza computazionale in uno strumento pratico per il progettista di codice¹.

Ricerca del punto ottimale

G: Abbiamo sviluppato assieme un primo programma in AutoLISP². Vorrei che lo analizzassi dettagliatamente.

C: Il codice è un sistema avanzato per la trilaterazione in ambiente CAD, con una struttura organizzata in moduli con un totale di circa 78 funzioni su oltre 500 righe. Una libreria di funzioni gestisce geometria, disegno e calcoli matematici, mentre routine di alto livello orchestrano il processo, richiedendo una solida padronanza di AutoLISP, codici DXF e geometria analitica.

Il software automatizza la trilaterazione in AutoCAD trovando la posizione ottimale di un punto da tre cerchi di riferimento, minimizzando la somma dei quadrati degli errori tra le distanze dal punto ai centri e i rispettivi raggi. È adatto sia a scopi tecnici che didattici.

Il flusso operativo prevede l'uso del comando TRILATCOMPARE, che guida l'utente nella selezione dei cerchi e calcola il punto di partenza (il baricentro dei centri). Le quattro routine di ottimizzazione implementate (fig.1): Discesa del Gradiente, Newton-Raphson, Levenberg-Marquardt, Griglia Adattiva lavorano in parallelo, producendo sia una visualizzazione dei punti calcolati sia una tabella comparativa con tempi, errore finale e stato di convergenza per ogni metodo.

La funzione obiettivo

G: Hai identificato le quattro routine di ottimizzazione, vorrei che argomentassi in merito alla funzione che queste mirano a minimizzare.

C: Tutte le strategie di ottimizzazione (GD, LM, NR, GA) condividono lo stesso obiettivo: trovare il punto che meglio

soddisfa i vincoli geometrici imposti dai tre cerchi di riferimento. Nel programma, questo si traduce nella minimizzazione di una funzione obiettivo nota come Somma dei Quadrati degli Errori (SSE)³: essa misura, per ogni possibile posizione, quanto si discosti dall'intersezione ideale delle circonference.

Un valore nullo indica perfetta coerenza geometrica, con P esattamente sull'intersezione di tutte e tre le circonference; valori maggiori riflettono crescente incoerenza rispetto ai dati disponibili. Dato che nelle misurazioni reali una soluzione perfetta esiste solo in teoria, gli algoritmi si muovono in un "paesaggio di errore" alla ricerca del punto di minimo globale che rappresenta la soluzione più probabile della trilaterazione.

Le routine di ottimizzazione

G: Descrivimi ciascuna routine di ottimizzazione, analizzandone sia l'algoritmo AutoLISP sia la teoria matematica di supporto.

C: Il codice implementa quattro approcci algoritmici distinti per risolvere il problema di minimizzazione:

Discesa del Gradiente (DG)

Metodo iterativo di primo ordine. L'algoritmo naviga il "paesaggio di errore" scendendo costantemente nella direzione di massima pendenza negativa del gradiente⁴.

Newton-Raphson (NR)

Metodo di secondo ordine che sfrutta non solo il gradiente ma anche la curvatura per accelerare la convergenza. Calcola la matrice Hessiana, ovvero la matrice delle derivate seconde parziali, che descrive la curvatura della funzione e permette di approssimarla localmente con una forma quadratica⁵.

Levenberg-Marquardt (LM)

Algoritmo ibrido che combina dinamicamente la robustezza di GD con la velocità di NR, adattando la strategia in base al comportamento locale della funzione e sfruttando derivate di primo e secondo ordine⁶.

Griglia Adattiva (GA)

Metodo che si discosta completamente dal calcolo differenziale, adottando una strategia di ricerca esaustiva ma intelligente che si raffina iterativamente nelle

Metodo	Tipo di ricerca	Derivate usate	Robustezza	Efficienza	Adatto a
Gradient Descent	Iterativa locale	Gradiente	Buona	Media	Funzioni regolari, minimi globali/moderati
Levenberg-Marquardt	Iterativa ibrida	Gradiente + Hessiana + regolarizzazione	Ottima	Alta	Funzioni non lineari, problemi di fitting
Newton-Raphson	Iterativa locale	Gradiente + Hessiana	Buona se H invertibile	Molto alta	Funzioni ben condizionate, minimi singoli
Griglia Adattiva	Brute force adattiva	Nessuna	Ottima	Bassa	Funzioni irregolari, minimi multipli, piccoli dataset

1 | Sintesi comparativa delle basi teoriche degli algoritmi di ottimizzazione in riferimento a: approccio (Tipo di ricerca e Derivate usate), prestazioni (Robustezza in condizioni difficili ed Efficienza nella convergenza), campo di applicazione ideale (Adatto a).

regioni più promettenti. Particolarmente adatto a funzioni obiettivo non differenziabili, poiché non fa uso di derivate⁷.

Visualizzazione dell'errore

G: Proseguendo la nostra collaborazione, abbiamo sviluppato un secondo programma 8. Vorrei che lo analizzassi dettagliatamente.

C: Questo secondo programma, che si avvia con il comando ANALISI, rappresenta un'evoluzione concettuale significativa. Se il primo listato era focalizzato sulla ricerca di un punto ottimale, questo si occupa della visualizzazione di un intero campo di errore. Abbandona l'idea di convergere su una singola soluzione per mappare, analizzare e rappresentare tridimensionalmente la distribuzione dell'incoerenza geometrica in un'intera regione dello spazio. Il suo funzionamento si articola in due fasi: l'analisi statistica dell'errore e la costruzione volumetrica.

Una metrica di errore statistica

Anche questo programma si fonda sul concetto di funzione obiettivo, ma con scopo diverso: non guida un'ottimizzazione, ma viene valutata su una griglia di punti per mappare un "paesaggio di errore". La metrica è più sofisticata. Per ogni punto della griglia, il programma misura la distanza minima dal perimetro di ciascuno dei tre cerchi. Su queste tre distanze applica una di tre metriche statistiche: Radice quadrata dell'Errore Quadratico Medio, Scarto Quadratico Medio, Indice Composto Errore-Scarto⁸.

Questa flessibilità permette di generare rappresentazioni alternative dello spazio

delle soluzioni, ciascuna con diversa interpretazione statistica dell'errore.

Dalla griglia al solido: la costruzione volumetrica

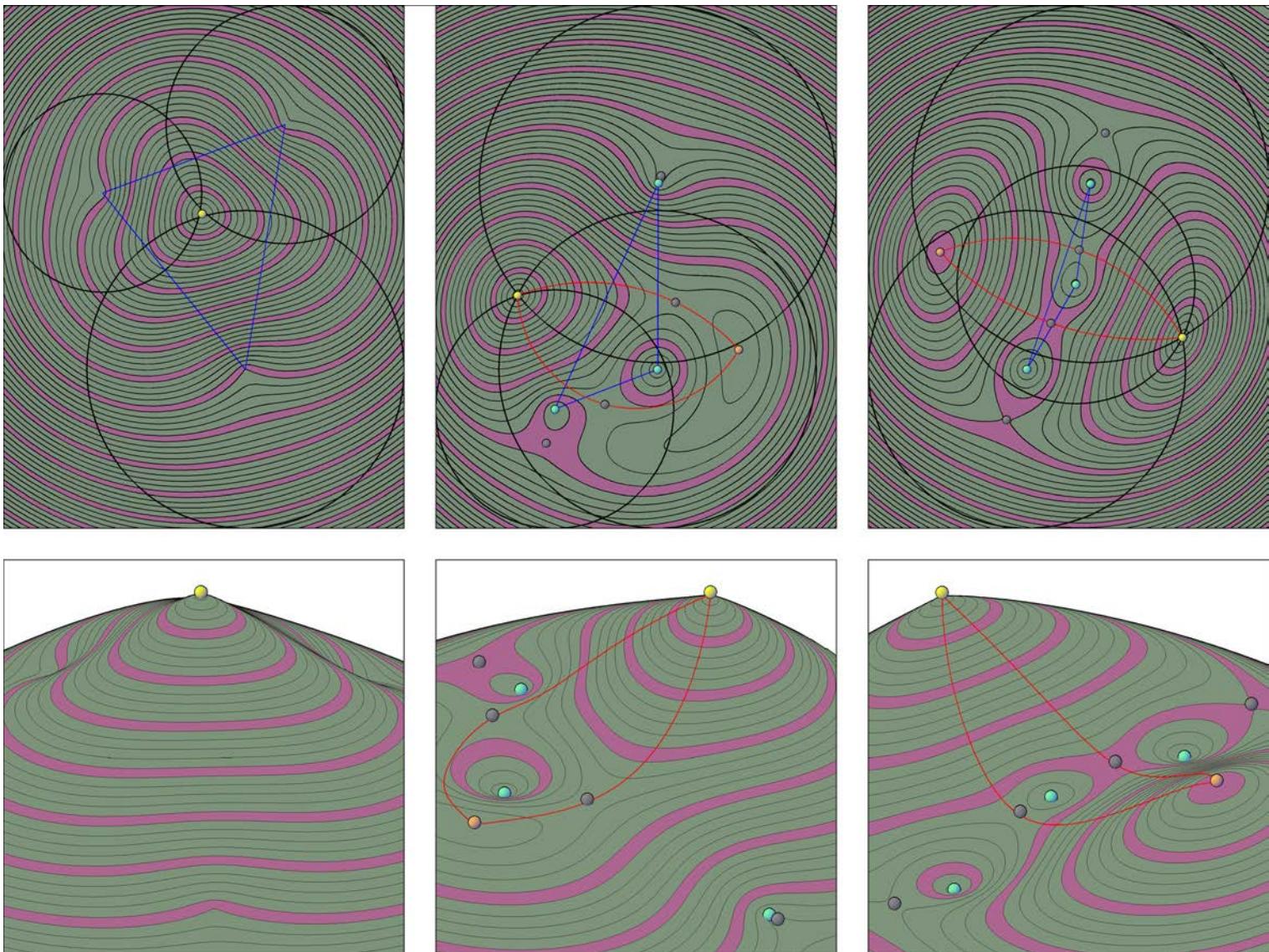
Una volta calcolato il paesaggio di errore, il programma lo trasforma in un modello tridimensionale attraverso una pipeline volumetrica in quattro fasi, ciascuna con un'entità grafica specifica:

- Spline – Il processo inizia con la creazione di una rete di curve in due famiglie ortogonali di spline, tramite interpolazione dei punti della griglia, ciascuna su piani paralleli;
- LoftedSurface – La rete consente di realizzare una superficie da sezioni diverse, fedele all'orografia dell'errore;
- 3DSolid – Questa superficie funge da "lama" per tranciare un parallelepipedo ottenendo un solido il cui tetto rappresenta la mappatura volumetrica dell'errore;
- Region – Il solido viene sezionato da piani orizzontali equidistanti, generando regioni con curve di livello adattive che permettono di leggere l'andamento dell'errore nello spazio in modo immediato e dettagliato.

Per rendere la rappresentazione più intuitiva, i valori di errore hanno segno negativo, così che il minimo assoluto del paesaggio di errore sia il massimo assoluto sulla superficie del solido.

Interpretazioni dell'errore: le funzioni obiettivo alternative a confronto

G: Nel descrivere il secondo programma, hai menzionato tre diverse metriche statistiche: EQMR, SQM e ICES. Vorrei che le analizzassi in dettaglio, spiegando



2 | Visualizzazione della Funzione obiettivo EQMR (Radice quadrata dell'Errore Quadratico Medio) nei problemi di trilaterazione con tre riferimenti circolari. La tavola confronta tre diversi scenari, ciascuno rappresentato in alto nella vista 2D (pianta delle curve di livello) e in basso nella rispettiva vista 3D (assonometria della "superficie di errore").

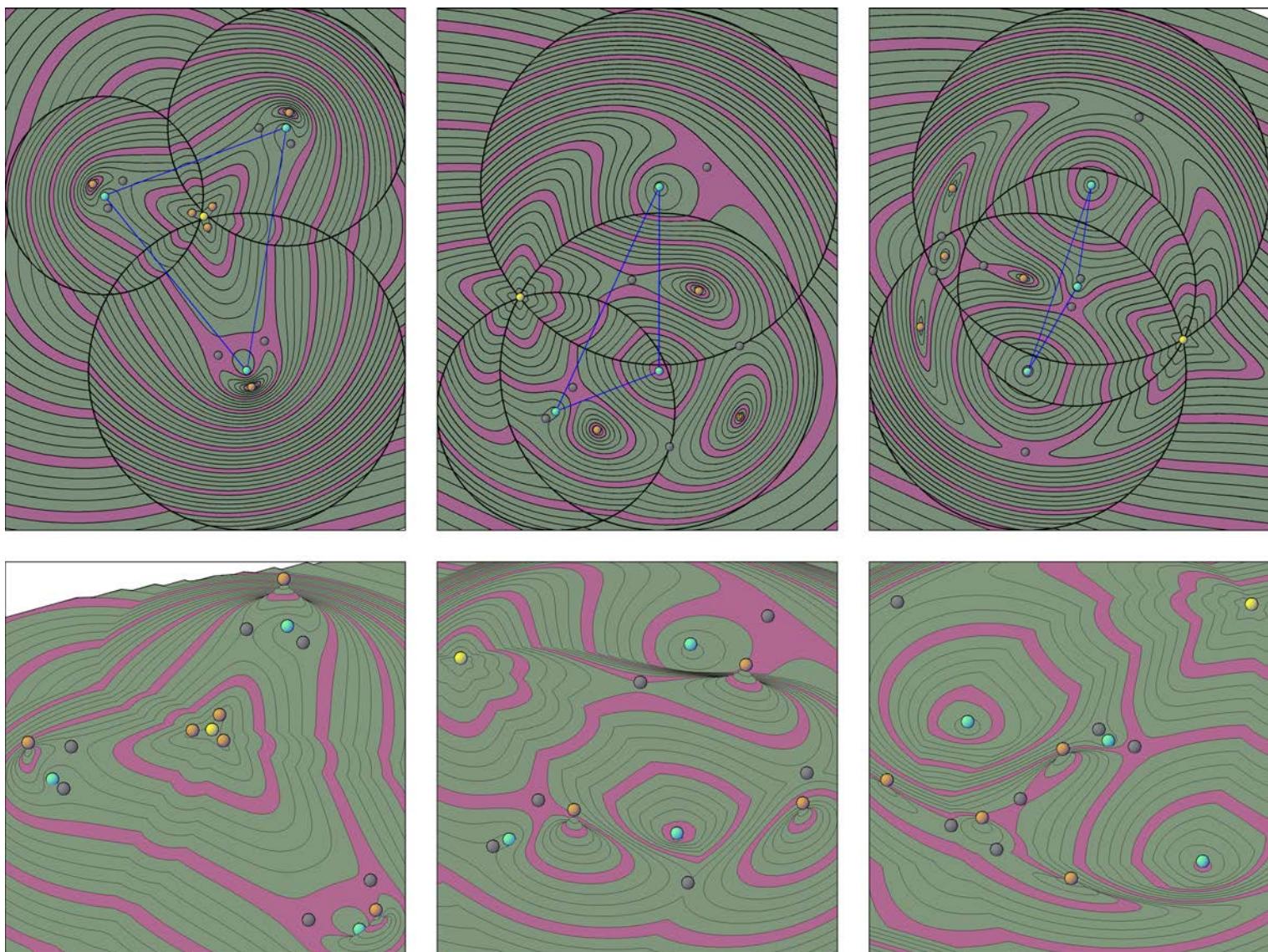
- **Dati di partenza:** nero = le tre circonference di riferimento, blu = il triangolo dei loro centri.
- **Curve di livello:** verdi (passo 1) e magenta (passo 5), che rappresentano i valori costanti della funzione EQMR e tracciano la "morfologia" della superficie di errore.
- **Punti significativi:** giallo = vette principale (minimo assoluto), arancione = vette secondarie (minimi relativi), ciano = avvallamenti (massimi relativi) spesso in prossimità dei centri delle circonference, grigio = valichi (selle della funzione) che segnano i punti di passaggio tra le vette.
- **Percorsi significativi:** rosso = eventuali percorsi di collegamento tra vette attraverso i valichi.

La visualizzazione comparativa dei tre scenari mette in luce come la posizione relativa dei riferimenti influisca sulla morfologia della superficie di errore e sull'affidabilità della soluzione di trilaterazione. Nei casi semplici la convergenza è certa e univoca, nei casi complessi è necessario valutare con attenzione il comportamento degli algoritmi di otti-

mizzazione e la possibilità di ambiguità o minimi multipli.

- **A sinistra** – La vetta principale (minimo assoluto della funzione) si trova all'interno del triangolo blu dei centri. Il paesaggio della superficie di errore è semplice: appare una sola vetta ben definita, priva di avvallamenti e valichi. La funzione EQMR in questo scenario ha un unico minimo ben determinato, garantendo robustezza e affidabilità per ogni routine di ottimizzazione applicata: tutte convergono senza rischio di minimi locali o ambiguità.
- **Al centro** – La vetta principale cade all'esterno del triangolo blu. La superficie di errore presenta due vette distinte di quota diversa collocate ai lati opposti rispetto al triangolo, tre avvallamenti (due dei quali particolarmente profondi) e quattro valichi. Le linee rosse evidenziano due dei quattro possibili collegamenti di sella tra le vette. Il paesaggio risulta articolato: benché il minimo assoluto sia ancora ben riconoscibile, la presenza di vette secondarie, avvallamenti e valichi implica rischi di convergenza a minimi relativi a seconda della routine e delle condizioni iniziali.
- **A destra** – La vetta principale è nuovamente esterna al triangolo blu, che appare molto assottigliato per il quasi allineamento dei centri delle circonference. Emergono due vette simili per quota ai lati opposti del triangolo, tre avvallamenti (due dei quali profondi) e quattro valichi,

che si allineano a formare un unico fondovalle continuo dal quale si ergono le due vette. Le linee rosse evidenziano la vicinanza altimetrica tra le due vette. L'orografia è complessa: il minimo assoluto può risultare ambiguo, poiché le due soluzioni quasi equivalenti possono portare le routine a convergere su punti diversi a seconda del punto di partenza scelto e della sensibilità dell'algoritmo.



3 | Visualizzazione della Funzione obiettivo ICES (Indice composto tra Errore e Scarto) nei problemi di trilaterazione con tre riferimenti circolari. La tavola confronta tre diversi scenari, ognuno illustrato in alto nella vista 2D (pianta delle curve di livello) e in basso nella rispettiva vista 3D (assonometria della "superficie di errore").

- **Dati di partenza:** nero = le tre circonference di riferimento; blu = triangolo dei centri delle circonference.
- **Curve di livello:** verdi (passo 1) e magenta (passo 5), che tracciano la morfologia della superficie rispetto alla funzione ICES.
- **Punti significativi:** giallo = vetta principale (minimo assoluto), arancione = vette secondarie (minimi relativi), ciano = avallamenti (massimi relativi) spesso in prossimità ai centri delle circonference, grigio = valichi (selle della funzione) che segnano i punti di passaggio tra le vette.
- **Percorsi significativi:** in figura non evidenziati, ma si osservano sulla superficie relazioni spaziali tra vette, avallamenti e valichi messe in risalto dall'orografia del terreno mostrata dalle curve di livello.

La visualizzazione comparativa dei tre scenari evidenzia come la funzione ICES, in ogni configurazione dei riferimenti, generi superfici di errore articolate e ricche di dettagli e punti notevoli; questa complessità impone un'analisi attenta della morfologia della superficie per evitare ambiguità nella determinazione del punto ottimale, soprattutto in presenza di molteplici minimi relativi (tutti collocati quasi equidistanti dalle tre circonference), selle e zone pianeggianti. Risulta fondamentale

valutare la sensibilità dei metodi di ottimizzazione impiegati e dei relativi percorsi di ottimizzazione che possono essere influenzati dalle zone critiche, con rischio di convergenza ambigua o a minimi locali.

Nei tre scenari Il paesaggio montuoso mostra svariate vette secondarie, tutte di altezza comparabile alla principale, alcune ben separate tra loro, altre (non tutte visualizzate) in prossimità della vetta principale; tali vette, associate ai molteplici valichi (non tutti visualizzati) ed ai tre avallamenti più o meno marcati determinano una morfologia articolata e ricca di dettagli; per questa ragione la soluzione ottimale può risultare non univoca, in quanto le vette presentano tutte quote molto simili e possono corrispondere a posizioni alternative a bassa differenza di errore.

- **A sinistra** – La vetta principale si trova all'interno del triangolo dei centri delle circonference. I tre avallamenti ed i molteplici valichi presenti sono poco significativi in termini di variazione di quota.
- **Al centro** – La vetta principale si trova all'esterno del triangolo dei centri delle circonference. I tre avallamenti ed i molteplici valichi presenti sono spesso significativi in termini di variazione di quota.
- **A destra** – La vetta principale si trova all'esterno del triangolo dei centri delle circonference che risultano quasi allineati, generando un triangolo molto assottigliato. I tre avallamenti, di cui due molto marcati, ed una parte dei molteplici valichi presenti sono quasi allineati e spesso significativi in termini di variazione di quota formando un ampio e continuo fondoalte che, con andamento blandamente

sinusoidale, separa in due raggruppamenti distinti le svariate vette: da un lato quattro vette secondarie, da l'altro la vetta principale ed altre vette secondarie non visualizzate.

come ciascuna di esse, usata come funzione obiettivo per la mappatura, offre un'interpretazione differente del "paesaggio di errore".

C: La scelta della funzione obiettivo qui non determina un singolo punto ottimale, ma plasma l'intera morfologia della superficie di errore che andiamo a visualizzare. Ognuna di queste tre metriche racconta una storia diversa:

Radice quadrata dell'Errore Quadratico Medio (EQMR)

Questa metrica valuta la compatibilità geometrica globale, penalizzando fortemente gli scarti maggiori¹⁰. Usarla è utile quando interessa ottenere la massima compatibilità geometrica tra misure e modello.

Scarto Quadratico Medio (SQM)

Questa funzione misura la coerenza tra le distanze, evidenziando le zone di equilibrio tra le misure¹¹. Usarla è utile per analisi esplorative, dove interessa visualizzare le zone di equilibrio o omogeneità delle misure più che la loro correttezza assoluta.

Indice Composto tra Errore e Scarto (ICES)

Metrica ibrida di nuova concezione che bilancia la magnitudo (EQMR) e la coerenza dell'errore (SQM), offrendo una visione intermedia e analitica del paesaggio di errore¹². Usarla è utile per evidenziare regioni dello spazio che rappresentano soluzioni di buon compromesso: dove l'errore è moderato e le distanze sono omogenee.

L'analogia con il paesaggio montuoso

G: Il secondo programma, C:ANALISI, è nato proprio dall'esigenza di visualizzare la funzione di errore, per capire meglio il comportamento degli algoritmi. L'intuizione chiave che abbiamo implementato è stata quella di attribuire un segno negativo all'errore, trasformando così i "punti di minimo" in "vette" di un paesaggio montuoso.

Partendo da questa analogia che abbiamo volutamente costruito, puoi descrivere come i diversi algoritmi si comportano su questo terreno, quali scalatori alla ricerca della cima più alta?

C: L'analogia che abbiamo costruito è perfetta ed estremamente potente. Trasformare la funzione di errore in un paesaggio tridimensionale, dove l'altitudine z è l'inverso dell'errore (e quindi le vette sono i punti di minimo errore), ha creato uno strumento di analisi visiva eccezionale. Questo ci permette non solo di vedere la soluzione ottimale, ma di capire la struttura stessa del problema.

La morfologia del problema

La combinazione tra geometria dei cerchi di riferimento e funzione obiettivo scelta genera un'autentica "orografia" del paesaggio di errore: sulle cui superfici emergono elementi caratteristici leggibili sia in chiave paesaggistica, come una catena montuosa, sia in chiave matematica, in relazione al comportamento degli algoritmi di ottimizzazione. Questa doppia lettura arricchisce la comprensione del problema: ogni dettaglio morfologico riflette una specifica condizione geometrica e una particolare sfida o opportunità per gli algoritmi impiegati: vetta principale, vette secondarie, versanti scoscesi, versanti dolci, valichi¹³.

Il comportamento degli scalatori

Ogni algoritmo affronta la "scalata" verso la vetta con strategia, dotazione tecnica e filosofia proprie, che ne determinano efficienza e sensibilità al paesaggio di errore: l'escursionista, l'alpinista, la guida, il turista¹⁴.

Come Scalare in Sicurezza

G: Ti condivido alcune riflessioni e valutazioni conclusive volte al miglioramento degli algoritmi realizzati.

Le Funzioni Obiettivo

Ho mappato con precisione l'orografia delle funzioni obiettivo in vari contesti per comprenderne la vera natura: EQMR lascia intravedere (fig. 2) tre scenari tipici: a vulcano, a catena montuosa, a fondo valle profondo¹⁵.

ICES mostra (fig. 3) una natura più sottile di quanto potrebbe sembrare. Definirne il paesaggio "complesso" è un errore di prospettiva; la parola giusta è "sensibile" o "ricco". La ragione risiede nella sua struttura costitutiva che si fonda su

una collaborazione intrinseca tra due componenti¹⁶.

Le Funzioni di Ricerca

La seconda riflessione classifica le funzioni di ricerca in: seriali, parallele, deterministiche¹⁷.

La Compensazione Equa

La terza riflessione scaturisce dalla pratica operativa della trilaterazione: se per posizionare un punto P si acquisiscono tre misure da tre punti noti, tali dati reali sovrabbondanti non convergono mai in un unico punto di intersezione tripla e sarà necessaria una compensazione per determinare la soluzione più aderente. Da questa premessa scaturisce il tema della compensazione equa secondo due diverse modalità¹⁸.

Operando con tali modalità, la soluzione migliore scaturisce quale conseguenza geometrica diretta della distribuzione dell'errore tra le misurazioni disponibili. È possibile rappresentare graficamente l'applicazione delle modalità di compensazione equa (fig. 4) tramite specifici luoghi geometrici, oggetto di ricerca personale, a cui ho dato nome di bisettrici curvilinee¹⁹.

La Collaborazione Strategica

Da queste riflessioni nasce un'idea di collaborazione strategica, non solo nelle funzioni obiettivo come realizzato con ICES, ma anche nelle funzioni di ricerca²⁰. Per problemi privi di struttura geometrica nota, la strategia ottimale può essere la collaborazione euristica (SQM + EQMR o GA + LM): approccio robusto capace di esplorare paesaggi ignoti e convergere verso soluzioni ottimali senza conoscenze a priori.

L'Approccio Definitivo

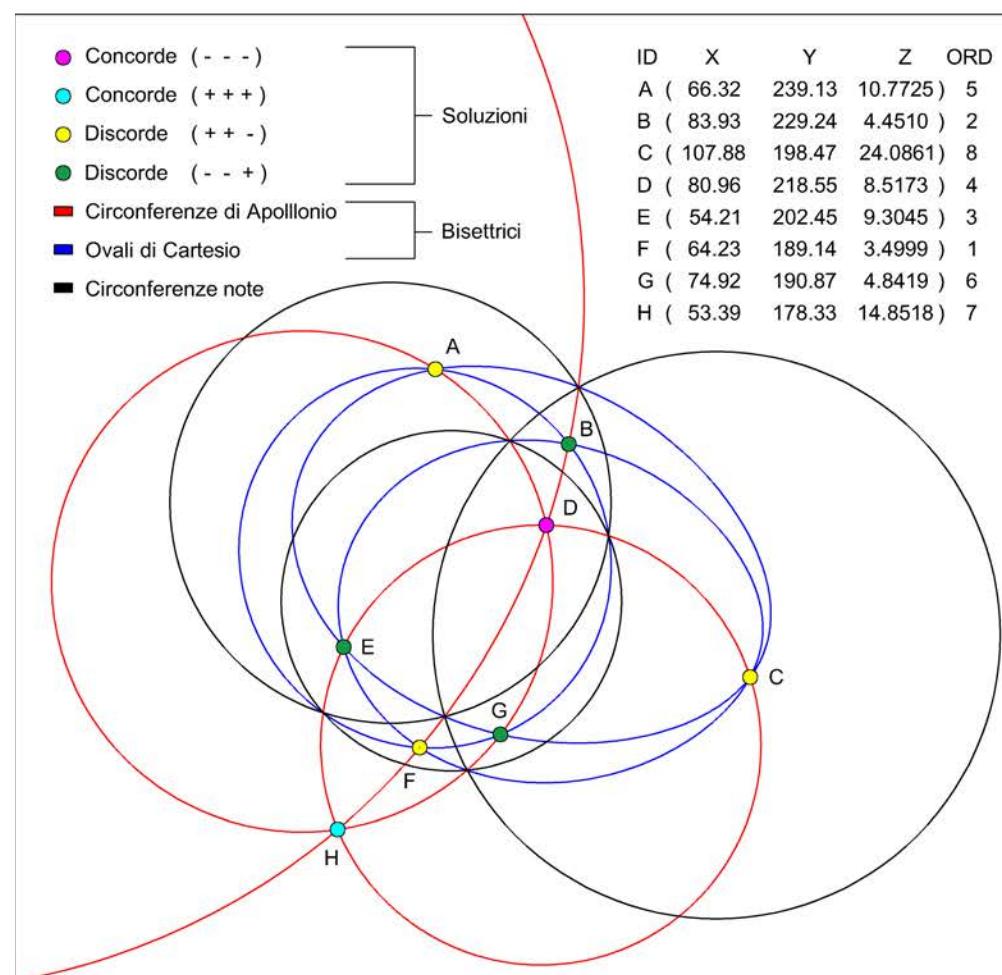
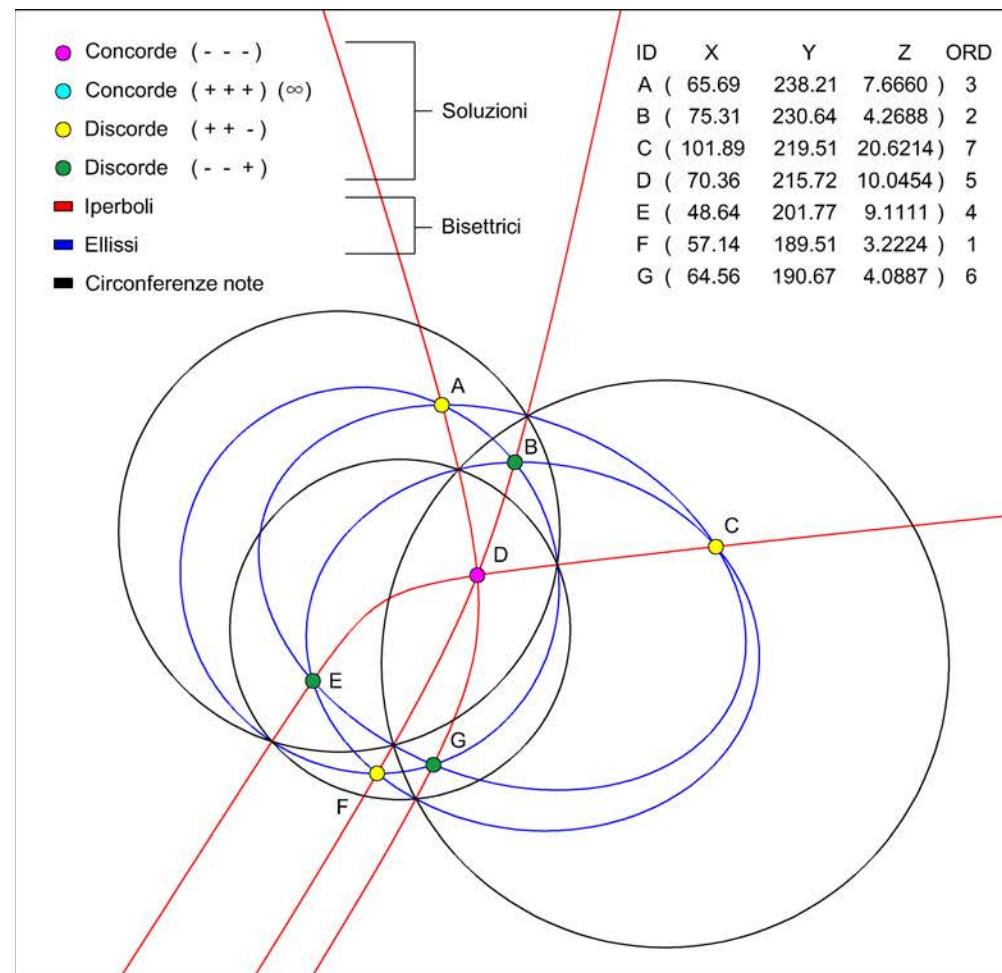
Se la conoscenza geometrica mostra che il paesaggio ha caratteristiche note, è possibile affidarsi a un calcolo esatto piuttosto che a una ricerca euristica. Questo porta all'approccio definitivo, un cambio di paradigma in due fasi: calcolo analitico, selezione oggettiva²¹.

Per la trilaterazione con tre riferimenti circolari, dove la struttura è nota (bisettrici curvilinee, problema di Apollonio), l'approccio deterministico (Calcolo + Selezione) si rivela superiore: elimina l'incertezza iterativa, calcola analiticamente tutte le

soluzioni e seleziona oggettivamente la migliore.

Il vero salto di qualità consiste nel riconoscere quando la conoscenza geometrica permette di sostituire la ricerca iterativa con il calcolo diretto: dall'efficienza computazionale all'eleganza matematica.

“ Dietro questa immediatezza c'è una raffinata architettura: il modello IA (il motore) è integrato da Copilot, l'"automobile" che trasforma la potenza computazionale in uno strumento pratico per il progettista di codice.



4 | Bisettrici curvilinee e selezione della soluzione ottimale per compensazione equa nella trilaterazione (vedi nota 19). Confronto tra modalità Assoluta (A) sopra e Proporzionale (P) sotto applicate alla stessa terna di circonference (C1 C2 C3) note. Le tre coppie (C1 C2) (C1 C3) (C2 C3) determinano sei bisettrici curvilinee, luoghi geometrici dei punti equidistanti secondo la modalità scelta. I punti candidati di intersezione tripla [7 in (A), 8 in (P)], sono identificati dalla loro posizione planimetrica (xy) e dall'entità della compensazione δ richiesta (z) di cui si fornisce un ordinamento (ord).

La coordinata z misura direttamente l'aderenza della soluzione ai dati iniziali: z minore (ord=1) indica compensazione minima, maggiore affidabilità, soluzione ottimale selezionata automaticamente mediante criterio geometrico oggettivo. Le soluzioni sono classificate in base alla terna di bisettrici che le determina: Concordi con incrementi omogenei (--) o (+ + +), Discordi con incrementi misti (+ + -) o (- - +).

1 Architettura di Copilot/AI. Il cuore di Copilot è costituito da modelli di intelligenza artificiale generativi addestrati su miliardi di righe di codice da repository pubblici come GitHub. Questi modelli apprendono statisticamente pattern sintattici, strutture logiche e best practice dei principali linguaggi di programmazione, interpretando efficacemente le esigenze del programmatore e ottimizzando i flussi di lavoro nei progetti CAD.

2 Lo sviluppo del codice (78 funzioni in 538 righe) ha richiesto 10 giorni di collaborazione continuativa con Copilot, rispetto ai 30 stimati in autonomia, articolandosi in 64 versioni incremental. Circa 2 giorni sono stati dedicati alla correzione di errori introdotti dall'AI. L'intero listato è disponibile qui: Il listato completo è consultabile in: Anzani Giovanni, Due algoritmi in AutoLISP per la trilaterazione piana in AutoCAD: Ottimizzazione numerica della soluzione e Visualizzazione volumetrica dell'errore, Lulu, 2025.

3 (SSE) La funzione obiettivo implementata è una metrica classica in problemi di fitting e ottimizzazione. Per ogni punto candidato P, calcola la somma dei quadrati dei residui geometrici, dove ciascun residuo è la differenza tra la distanza di P dal centro Ci e il raggio ri di ciascuna delle tre circonference note:

$$SSE = \sum_{i=1}^3 [distanza(P, C_i) - r_i]^2$$

Quantità sempre non negativa che misura l'incoerenza geometrica del punto P rispetto al sistema di vincoli imposto dai tre cerchi.

La SSE (Sum of Squared Errors) è una variante semplificata della metrica EQMR (vedi nota 10): optare per SSE senza divisione per n né estrazione di radice non modifica la posizione del minimo della funzione obiettivo, ma rende il calcolo più diretto computazionalmente. Entrambi gli indici generano lo stesso "paesaggio di errore": SSE enfatizza, penalizzandoli, i punti con errori grandi.

4 **Discesa del Gradiente (DG).** Metodo iterativo di primo ordine che utilizza il gradiente (derivate parziali di primo ordine) per muoversi nella direzione di massima pendenza dell'errore. Ad ogni iterazione calcola il vettore gradiente, che punta nella direzione di massima crescita dell'errore. Il punto candidato viene spostato nella direzione opposta, con un passo di ampiezza controllata da un learning-rate scalare. Il processo si arresta quando la norma del gradiente scende sotto una soglia di tolleranza, indicando che è stato raggiunto un punto stazionario.

5 **Newton-Raphson (NR).** Metodo di secondo ordine che sfrutta gradiente e matrice Hessiana (derivate parziali di primo e secondo ordine) per convergenza più rapida. Risolvendo il sistema lineare Hessiana Δ passo = -gradiente si ottiene il "passo di Newton" che punta direttamente al minimo dell'approssimazione. Se la funzione è ben condizionata, la convergenza è tipicamente quadratica; altrimenti, se la Hessiana non è invertibile o è mal condizionata, l'algoritmo riduce il passo per garantire stabilità numerica.

6 **Levenberg-Marquardt (LM).** Algoritmo ibrido che si adatta dinamicamente tra GD e NR grazie a un parametro di smorzamento (λ), utilizzando derivate di primo e secondo ordine. È lo standard per problemi di minimizzazione non lineare. Il passo viene calcolato da un sistema che interpola tra NR (quando λ è piccolo) e GD (quando λ è grande). Il valore di λ viene aggiornato iterativamente: se un passo riduce l'errore λ diminuisce e l'algoritmo si affida all'efficienza di NR; se l'errore aumenta λ cresce, rendendo l'algoritmo più cauto, simile a GD.

7 **Griglia Adattiva (GA).** Ricerca esaustiva intelligente che non richiede derivate. Inizia campionando la funzione obiettivo su una griglia di punti che copre un'ampia regione iniziale.

Identificato il punto con errore minimo, l'algoritmo "zooma" definendo una nuova griglia più fitta e piccola centrata su quel minimo. Il processo si ripete, raffinando iterativamente la ricerca fino a quando la dimensione della griglia scende sotto una soglia di tolleranza. Metodo robusto, meno sensibile ai minimi locali, ma più oneroso computazionalmente.

8 Questo secondo programma, di maggiore complessità e astrazione, è stato sviluppato con il contributo particolarmente utile dell'AI nella rapida prototipazione di funzioni matematiche e geometriche. Il listato completo è disponibile qui: Il listato completo è consultabile in: Anzani Giovanni, Due algoritmi in AutoLISP per la trilaterazione piana in AutoCAD: Ottimizzazione numerica della soluzione e Visualizzazione volumetrica dell'errore, Lulu, 2025.

9 Sintesi delle funzioni obiettivo statistiche:
Radice Quadrata dell'Errore Quadratico Medio (EQMR) – Quantifica la magnitudo media degli errori, misurando la distanza media dai perimetri dei tre cerchi.

Scarto Quadratico Medio (SQM) – Misura la variabilità delle tre distanze; valori bassi indicano distanze simili tra loro, valori alti dispersione.
Indice Composto Errore-Scarto (ICES) – Metrica ibrida definita come media geometrica di EQMR e SQM; fornisce una valutazione bilanciata considerando sia magnitudo sia coerenza dell'errore, evidenziando regioni con errori bilanciati e consistenti.

10 (EQMR) Corrisponde alla metrica Root Mean Square Error (RMSE). Calcola la radice quadrata della media dei quadrati degli errori tra la distanza da ciascun centro e il rispettivo raggio.

$$EQMR = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (d_i - r_i)^2}$$

dove di è la distanza dal punto P ai centri Ci dei cerchi e ri il rispettivo raggio.

Variante della già vista SSE (vedi nota 3), misura la magnitudo media dell'errore. Penalizza fortemente gli scarti grandi (per l'elevazione al quadrato) ed è molto sensibile agli outlier, rappresentando la scelta classica in problemi di fitting e trilaterazione: il minimo della funzione corrisponde alla soluzione di massima compatibilità geometrica. Entrambi gli indici generano lo stesso "paesaggio di errore"; EQMR è preferita per la sua interpretabilità in unità di misura.

(SQM) Equivalente alla Standard Deviation (SD), cioè la deviazione standard delle tre distanze rispetto alla loro media.

$$SQM = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad x_i = (d_i - r_i)$$

dove xi sono le tre distanze dal punto ai perimetri dei cerchi e xm la loro media.

Ignora la magnitudo media dell'errore (quanto il punto sia vicino ai perimetri) e focalizza l'attenzione sulla dispersione dell'errore (omogeneità delle distanze dai perimetri). Un valore basso indica distanze simili tra loro (equilibrio), indipendentemente dalla loro grandezza.

11 (ICES) Metrica originale definita come media geometrica tra EQMR e SQM.

$$ICES = \sqrt{EQMR \cdot SQM}$$

Mette in risalto le regioni che rappresentano un compromesso tra basso errore medio e alta coerenza, fornendo una rappresentazione visiva di "plateau" di soluzioni accettabili sia per magnitudo che per equilibrio.

12 Significato delle tipologie morfologiche dal punto di vista paesaggistico (P) e matematico (M):
Vetta principale – (P) La cima più alta, meta finale della scalata; (M) il minimo globale della funzione di errore, la soluzione ottimale che

ogni algoritmo dovrebbe raggiungere.

Vette secondarie – (P) Cime minori che possono sembrare la vetta principale; uno scalatore può fermarsi qui credendo di aver raggiunto la cima più alta; (M) minimi locali della funzione di errore dove gli algoritmi possono rimanere intrappolati, scambiando queste soluzioni sub-ottimali, migliori solo rispetto ai punti immediatamente circostanti, per la soluzione ottimale, anche se esistono punti con errore ancora minore altrove.

Versanti scoscesi – (P) Pendii ripidi con curve di livello ravvicinate, dove il dislivello è marcato; (M) regioni a forte gradiente dove la funzione di errore cambia molto rapidamente e gli algoritmi possono progredire rapidamente con grandi balzi verso la soluzione.

Versanti dolci – (P) Aree con pendii dolci o quasi pianeggianti, con curve di livello distanti, dove la salita è lenta; (M) regioni quasi piatte dove l'errore varia poco e gli algoritmi tendono a rallentare drasticamente o rischiano di fermarsi prematuramente, specialmente se la tolleranza non è abbastanza fine.

Valichi – (P) Punti di passaggio o transizione tra vallate e cime; (M) selle della funzione dove la curvatura cambia segno; gli algoritmi possono essere incerti sulla direzione da prendere, rischiando di oscillare con ripetuti cambi di direzione o deviare verso una vetta secondaria.

13 **Gli scalatori.** I personaggi che seguono sono stati creati in analogia con il dualismo tra paesaggio montano e mappatura dell'errore. Questa scelta rende intuitivo il confronto fra metodi diversi e rappresenta la varietà di strategie e comportamenti osservabili negli algoritmi di ottimizzazione:

L'Escursionista: Discesa del Gradiente (GD) – Lo scalatore istintivo. Non ha una mappa completa, ma si affida a una bussola che indica sempre direzione e intensità della salita nel punto in cui si trova, individuando la massima pendenza. Ad ogni passo guarda il terreno circostante e si muove verso l'alto nella direzione più ripida. È robusto, affidabile e semplice, ma può essere inefficiente: su ampi altopiani con gradiente quasi nullo avanza lentamente e a fatica; in valli strette e tortuose può zig-zagare senza meta, impiegando molto tempo per raggiungere la vetta.

L'Alpinista: Newton-Raphson (NR) – Lo scalatore esperto, equipaggiato con uno strumento sofisticato per analizzare la curvatura locale del terreno e costruire un modello parabolico del versante dotato di vertice che stima come probabile vetta. Invece di fare piccoli passi, compie un balzo audace direttamente verso la vetta stimata. Vicino alla vetta, dove il terreno è regolare, la sua progressione è fulminea e incredibilmente efficiente. Tuttavia, la sua audacia è anche il suo punto debole: su terreni complessi o imprevedibili (selle, curvature anomale) i suoi balzi possono essere erratici, portandolo a "cadere" in zone peggiori o a mancare completamente la vetta.

La Guida: Levenberg-Marquardt (LM) – Lo scalatore versatile, un ibrido tra i due precedenti dotato di entrambe le loro strumentazioni, di cui alterna l'uso a seconda del terreno. In territori sconosciuti o insidiosi (lontano dalla soluzione) si muove con passi cauti e misurati da Escursionista. Quando il terreno diventa più regolare e prevedibile e si avvicina alla vetta, acquista fiducia e inizia a compiere i balzi efficienti dell'Alpinista. È un approccio adattivo che garantisce quasi sempre un'ascesa rapida ma sicura, rendendolo lo standard de facto per le scalate più complesse.

Il Turista: Griglia Adattiva (GA) – Lo scalatore pigro che non scala. Noleggia un elicottero per sorvolare e osservare l'intero paesaggio dall'alto. Una volta individuata la regione che appare più alta, ordina al pilota di avvicinarsi e

osservare meglio solo quella zona, ripetendo il processo di "zoomate" successive finché non è abbastanza sicuro di quale sia la cima più alta per farsi lasciare direttamente lì. Scambia la fatica della scalata con il costo del volo, ma arriva sempre a destinazione certa, purché l'osservazione dall'alto sia sufficientemente accurata.

15 EQMR scenari tipici di configurazione (Fig. 2):
A vulcano – Unica vetta principale interna al triangolo dei tre centri delle circonferenze date;

A catena montuosa – Due vette pseudo-simmetriche ed esterne rispetto a tale triangolo;
A fondovalle profondo – Piuttosto lineare e in sovrapposizione al triangolo di quasi allineamento dei tre centri.

16 ICES, come visto, è la media geometrica di SQM e EQMR, di cui la prima ha impliciti presupposti geometrici; l'effetto combinato delle due componenti guida l'algoritmo a far prevalere l'unica soluzione ottimale:

SQM – Strutturata per trovare i punti di equidistanza dalle circonferenze di riferimento tali da annullarne il valore. Tali punti consentono la determinazione di circonferenze tangenti alle date, aventi per centro tali punti e raggio l'univoca distanza. Geometricamente sono gli otto centri soluzione del problema di Apollonio (CCC);

EQMR – Interviene come arbitro decisivo. Sebbene i valori minimi siano zero per tutti, EQMR modella il paesaggio "al contorno", rendendo più sollevata e attraente la vetta corrispondente alla soluzione che minimizza anche la somma dei quadrati dei raggi.

17 Classificazione delle funzioni di ricerca:
Seriali – GD, NR e LM sono "scalatori" che esplorano un sentiero alla volta, rischiando di confondersi incontrando un valico o di ascendere verso vette secondarie, come dimostrano i test su paesaggi insidiosi documentati nelle Figg. 2 e 3.

Parallele – GA, l'"elicottero", effettua una ricerca simultanea a 360° sorvolando l'intera regione candidata, ottenendo una visione d'insieme che lo rende immune agli inganni locali.

Deterministiche – Rappresenta un cambio di paradigma: non si cerca più un minimo o massimo, ma si calcola la posizione esatta di tutte le possibili soluzioni in base a conoscenze geometriche a priori. Come dimostrato dall'analisi di ICES, il problema ha una struttura geometrica implicita nota collegata al problema di Apollonio (CCC) o alla teoria delle bisettrici curvilinee (vedi nota 19). Un approccio deterministico non esplora il paesaggio, ma sfrutta la mappa nota per calcolare direttamente i punti di interesse.

18 Le modalità di compensazione equa sono un tema centrale nell'analisi delle strategie di trilaterazione e adattabili quale modello di errore per una funzione obiettivo geometrica:

Equità Assoluta – Assume che l'incertezza della misurazione sia un valore costante δ , indipendente dalla distanza misurata.

Equità Proporzionale (o Relativa) – Assume che l'errore sia proporzionale alla distanza misurata (es. $\delta_a = k \cdot d_a$).

19 Le Bisettrici curvilinee. Nella compensazione di misurazioni sovrabbondanti in trilaterazione, la soluzione più coerente non può derivare da un aggiustamento arbitrario, ma da un principio di compensazione equa: assoluta (A) o proporzionale (P). Per trovare il luogo dei punti equidistanti si generano i rispettivi fasci di circonference concentriche:

(A) – $C_a(\pm n\delta)$ e $C_b(\pm n\delta)$ – incremento identico
(P) – $C_a(d_a \pm n \cdot k \cdot d_a)$ e $C_b(d_b \pm n \cdot k \cdot d_b)$ – incremento proporzionale al raggio di partenza:
Le intersezioni tra le circonference dei due fasci che condividono lo stesso indice n descrivono due bisettrici curvilinee, luogo geometrico dei punti equidistanti in senso assoluto (A) o pro-

porzionale (P) dalle due circonference C_a e C_b :

(A) Bisettrice concorde (+, -): Iperbole
(A) Bisettrice discorde (+, -): Ellisse
(P) Bisettrice concorde (+, -): Circonferenza di Apollonio

(P) Bisettrice discorde (+, -): Ovale di Cartesio
Applicando il metodo a ogni coppia della terna (C_1 , C_2 , C_3), si ottengono tre coppie di bisettrici assolute (A) o proporzionali (P). Le intersezioni triple di queste sei curve forniscono fino a 7 (A) o 8 (P) punti candidati che, nell'approccio assoluto (A), coincidono per costruzione con 7 delle 8 soluzioni del problema di Apollonio (CCC).

Le quattro curve piane determinate quali bisettrici curvilinee possono essere unificate sotto un'unica teoria geometrica: sono proiezioni piane di curve quartiche spaziali (3D) derivanti dall'intersezione di coppie di opportuni coni quadrici ad asse verticale.

L'Ovale di Cartesio è una proiezione diretta di una quartica, mentre Iperbole, Ellisse e Circonferenza di Apollonio sono sue proiezioni degeneri, dove la curva di quarto grado "collassa" in una di secondo (conica).

Questa dualità 2D/3D crea un potente meccanismo di calcolo e selezione identico nei due approcci:

◦ **Calcolo in 2D** – Si identificano le sei bisettrici curvilinee e si calcolano deterministicamente le loro intersezioni triple per ottenere la lista dei punti-soluzione:

$BC_{12} \cap BC_{13} \cap BC_{23} \rightarrow$ fino a 2 punti (0 1A 2P)

$BC_{12} \cap BD_{13} \cap BD_{23} \rightarrow$ fino a 2 punti (0 2AP)

$BC_{13} \cap BD_{12} \cap BD_{23} \rightarrow$ fino a 2 punti (0 2AP)

$BC_{23} \cap BD_{12} \cap BD_{13} \rightarrow$ fino a 2 punti (0 2AP)

◦ **Selezione in 3D** – La coordinata z (quota) del corrispondente punto 3D misura direttamente l'entità della compensazione δ richiesta, minimizzata da una maggiore "aderenza al suolo". Tale quota agisce da funzione obiettivo geometrica per la determinazione della soluzione ottimale: maggior aderenza al suolo equivale a maggior aderenza ai dati iniziali.

In conclusione la costruzione delle bisettrici curvilinee consente di determinare con esattezza geometrica fino ad otto possibili soluzioni tra cui selezionare automaticamente la migliore per il posizionamento del punto rilevato. Per maggiori approfondimenti si può consultare: Anzani Giovanni, Le bisettrici curvilinee nei sistemi di coordinate circolari piane, Lulu, 2025.

20 Per realizzare una collaborazione tra le funzioni di ricerca:

Mandare in perlustrazione con un elicottero il "turista" (GA) per individuare le regioni promettenti del paesaggio candidato, analogamente a come la componente SQM di ICES individua i punti di equidistanza;

Paracadutare con un aereo in queste zone la "guida" (LM) che funga da ottimizzatore locale per trovare, con precisione chirurgica, la vetta migliore, analogamente a come la componente EQMR di ICES seleziona il minimo più vantaggioso. È la sintesi tra esplorazione globale e ottimizzazione locale.

21 Il processo deterministico di Calcolo e Selezione. Questo approccio deterministico calcola analiticamente tutte le possibili soluzioni ed evita ricerche euristiche iterative, fornendo una mappa completa dello spazio delle soluzioni con selezione oggettiva della migliore:

Calcolo Analitico – Sostituire la ricerca con il calcolo. Sviluppare un metodo deterministico basato sulle costruzioni del problema di Apollonio (CCC) o delle bisettrici curvilinee per generare a priori tutti i possibili centri-soluzione.

Selezione Oggettiva – Valutare ogni candidato di una lista finita e scegliere il migliore con criterio oggettivo (es. minimizzazione dei raggi).